Corrigé fourni par le concours, faire +20 au numéros des questions pour correspondre au DS.

II ÉTUDE DES SÉRIES OSCILLANTES

Q15. Soit λ tel que $\sum u_n(\lambda)$ converge, et soit $\mu \in \mathbf{C}$ tel que $\mu \neq \lambda$. Or

$$u_n(\mu) = u_n(\lambda) + \frac{\mu - \lambda}{n}$$

et $\sum \frac{\mu-\lambda}{n}$ diverge ; comme somme d'une série convergente et d'une série divergente, $\sum u_n(\mu)$ diverge.

$$\boxed{\text{S'il existe une valeur } \lambda \in \mathbf{C} \text{ telle que } \sum u_n(\lambda) \text{ converge, alors celle-ci est unique.}}$$

Q16.

16.a) Par périodicité, on a

$$\frac{1}{md+1} \sum_{k=1}^{d} \omega_{md+k} = \frac{\omega_1 + \cdots + \omega_d}{md+1}$$

ou encore

$$\boxed{\frac{1}{md+1} \sum_{k=1}^{d} \omega_{md+k} = \frac{\Omega}{md+1}.}$$

16.b) Écrivons, pour tout $m \in \mathbf{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_{(m+1)d} - \mathrm{S}_{md} - \frac{1}{md+1} \sum_{k=1}^{d} \omega_{md+k} &= \sum_{k=1}^{d} \frac{\omega_k}{md+k} - \sum_{k=1}^{d} \frac{\omega_k}{md+1} \\
&= \sum_{k=1}^{d} \omega_k \left[\frac{1}{md+k} - \frac{1}{md+1} \right] \\
&= \frac{1}{md} \sum_{k=1}^{d} \omega_k \left[\frac{1}{1+\frac{k}{md}} - \frac{1}{1+\frac{1}{md}} \right] \\
&= \frac{1}{md} \sum_{k=1}^{d} \omega_k \left[1 - \frac{k}{md} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{m}\right) - 1 + \frac{1}{md} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{m}\right) \right] \\
&= \frac{1}{m^2} \cdot \frac{1}{d^2} \sum_{k=1}^{d} (1-k)\omega_k.
\end{aligned}$$

En posant

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{d^2} \sum_{k=1}^{d} (1-k)\omega_k,}$$

alors

$$\mathrm{S}_{(m+1)d} - \mathrm{S}_{md} = \frac{1}{md+1} \sum_{k=1}^{d} \omega_{md+k} + \frac{\alpha}{m^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{m^2}\right).$$

16.c) Puisque

$$\mathrm{S}_{(m+1)d} - \mathrm{S}_{md} = \frac{\Omega}{md+1} + \frac{\alpha}{m^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{m^2}\right),$$

que la série $\sum \frac{\alpha}{m^2}$ converge et que la série $\sum \mathrm{o}(1/m^2)$ converge absolument, on en déduit que la série $\sum \left(\mathrm{S}_{(m+1)d} - \mathrm{S}_{md}\right)$ a même nature que la série $\sum_m \frac{\Omega}{md+1}$:

$$\boxed{\text{La série } \sum \left(\mathrm{S}_{(m+1)d} - \mathrm{S}_{md}\right) \text{ converge si et seulement si } \Omega = 0.}$$

16.d) La suite des sommes partielles associée à la série précédente est la sous-suite $(\mathrm{S}_{md})_m$ des sommes partielles de la série $\sum u_n$. Notamment, si cette sous-suite diverge, la suite $(\mathrm{S}_n)_{n \geqslant 1}$ diverge également.

Réciproquement, supposons que la série $\sum \left(\mathrm{S}_{(m+1)d} - \mathrm{S}_{md}\right)$ converge, c'est-à-dire que la suite $(\mathrm{S}_{md})_m$ converge. On note ℓ sa limite. Alors, pour tout $i \in [\![1\,;d-1]\!]$, la sous-suite $(\mathrm{S}_{md+i})_m$ converge également, puisque

$$\mathrm{S}_{md+i} = \mathrm{S}_m d + \sum_{k=1}^{i} \underbrace{\frac{\omega_{md+k}}{md+k}}_{\xrightarrow[m\to\infty]{}0} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell.$$

On en déduit que la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge si et seulement si } \Omega = 0.}$$

Q17. Si l'on note $\Omega(\lambda) = \sum_{k=1}^{d}(\omega_k + \lambda) = \Omega + d\lambda$, l'étude qui précède montre que la série $\sum u_n(\lambda)$ converge si et seulement si $\Omega(\lambda) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\lambda = -\Omega/d$.

$$\boxed{\lambda = -\Omega/d \text{ est l'unique valeur telle que la série } \sum u_n(\lambda) \text{ converge.}}$$

Q18.

18.a) $(\mathrm{T}_n)_{n\geqslant 1}$ est périodique, donc

$$\boxed{\text{La suite } (\mathrm{T}_n)_{n\geqslant 1} \text{ est bornée.}}$$

18.b) Écrivons

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{\omega_k}{a_k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{T}_k - \mathrm{T}_{k-1}}{a_k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{T}_k}{a_k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{T}_{k-1}}{a_k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{T}_k}{a_k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathrm{T}_k}{a_{k+1}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{T}_k}{a_k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\mathrm{T}_k}{a_{k+1}} && \mathrm{T}_0 = 0 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{T}_k \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right) + \frac{\mathrm{T}_n}{a_{n+1}}.
\end{aligned}$$

18.c) On note M un majorant de la suite $\left(|\mathrm{T}_n|\right)_{n\geqslant 1}$. Le terme général de la série étudiée vérifie

$$\left|\mathrm{T}_k\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)\right| \leqslant \mathrm{M}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

or la série $\sum \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)$ converge (elle est télescopique et $1/a_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Ainsi

$$\boxed{\sum \mathrm{T}_k \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right) \text{ converge absolument, donc converge.}}$$

18.d) S'en déduit immédiatement.